به نام خدا

دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

فصل اول-دنباله‌های عددی

فعالیت ۱ (محاسبات با اعداد گنگ). اگر a و b دو عدد گویا باشند، آنگاه به راحتی می‌توان آن‌ها را با هم جمع یا در هم ضرب کرد؛ اما اگر a و b دو عدد گنگ باشند چطور؟ برای محاسبه $a+b$، ab و a/b چه کار می‌توان کرد؟

الف) اگر $a = 0.123456789\cdots$ و $b = 0.1010010001000010\cdots$ باشد، راهی برای محاسبه $a+b$ بیابید. آیا می‌توانید $a+b$ را تا پنج رقم اعشار حساب کنید؟ چگونه مطمئن می‌شوید که با محاسبه رقم‌های بیشتری از a و b، ۵ رقم اول اعشار تغییر نمی‌کند؟

ب) اگر $A = a_0.a_1a_2a_3\cdots$ و A_n بریده شده A تا رقم n ام اعشار باشد، همین طور B و B_n؛ در مورد $A_n + B_n$ و $A+B$ چه می‌توان گفت؟ این دو عدد چقدر بهم نزدیک هستند؟
در مورد عمل ضرب کردن اما مسئله کمی سخت‌تر است که در ادامه به آن خواهیم پرداخت.

به طور کلی وقتی می‌خواهیم محاسبه کنیم، مجبور هستیم از مقادیر تقریبی (مثل بریدن و گرد کردن اعداد) استفاده کنیم. بنابراین باید بدانیم که محاسبات‌مان چقدر دقیق است. بدین منظور دنباله‌ها و همگرایی آنها را تعریف می‌کنیم. با این ابزار می‌توانیم میزان دقتی که برای محاسبات‌مان لازم است را بدست آوریم. به عبارت دیگر باید بتوانیم در محاسبات‌مان خطاها را کنترل کنیم. در فصل دوم بیشتر در مورد این موضوع بحث خواهیم کرد.

فعالیت ۲ (مفهوم همگرایی).

تعریف ۱. به دنباله‌ای از اعداد (چه حقیقی، چه مختلط) به صورت a_1، a_2، a_3 و...، یک دنباله عددی می‌گویند.

تعریف ۲. می‌گوییم دنباله عددی a_n به عددی مانند a همگرا است (میل می‌کند) اگر برای هر $\varepsilon > 0$، وجود داشته باشد $N > 0$ به طوریکه برای هر $n \geq N$، داشته باشیم $|a_n - a| < \varepsilon$؛ و می‌نویسیم $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$.

الف) نشان دهید دنباله $a_n = 1/n$ به صفر میل می‌کند.

ب) نشان دهید دنباله $a_n = (n+1)/n$ به ۱ همگراست.

ج) نشان دهید دنباله $a_n = i/n$ به صفر همگراست.

فعالیت ۳ (محاسبات تقریبی برای اعداد گنگ).

الف) اگر a یک عدد حقیقی و a_n بریده شده آن تا رقم n ام اعشار باشد، نشان دهید a_n به a همگراست.

ب) نشان دهید یک دنباله صعودی از اعداد حقیقی که از بالا کران‌دار است به کوچکترین کران بالایی خود همگراست. (توجه کنید که گزاره (الف) حالت خاصی از این گزاره است.)

ج) نشان دهید اگر a_n به a و b_n به b همگرا باشد، آنگاه $a_n + b_n$ به $a + b$ همگراست.

د) فرض کنید $a = 487.r_1r_2r_3\cdots$ و $b = 3.s_1s_2s_3\cdots$ باشند و a_n و b_n نیز بریده شده آنها تا رقم n ام اعشار باشند. n را طوری بیابید که اختلاف a_nb_n با ab کوچکتر از 10^{-5} باشد.
راهنمایی: $|ab - a_nb_n| \leq |ab - a_nb| + |a_nb - a_nb_n|$.

و) نشان دهید اگر یک دنباله از اعداد مختلط همگرا باشد، کران‌دار است. به عبارت دیگر اگر z_n به z^* همگرا باشد، آنگاه عددی مثبت مانند K یافت می‌شود به طوریکه به ازای هر n، $|z_n| < K$ و $|z^*| < K$.

ه) نشان دهید اگر a_n به a و b_n به b همگرا باشد، آنگاه a_nb_n به ab همگراست.

ز) فرض کنید $b = 0.032190990958\cdots$ که سایر ارقام نمایش اعشاری آن نیز طبق دستوری در دسترس هستند اما در اینجا درج نشده‌اند. فرض کنید b_n عددی باشد که از مختوم کردن b پس از n رقم بعد از ممیز به دست می‌آید. n را طوری پیدا کنید که $|1/b - 1/b_n|$ کوچکتر از 10^{-3} باشد.

ح) فرض کنید (z_n) دنباله‌ای از اعداد مختلط غیرصفر باشد که به z^* همگراست و $z^* \neq 0$. در این صورت، عددی مثبت مانند K وجود دارد به طوریکه به ازای هر n، $|z_n| > K$ و نیز $|z^*| > K$.

ط) نشان دهید اگر a_n به a و b_n به b همگرا باشد به طوری که $b_n \neq 0$ و $b \neq 0$، آنگاه a_n/b_n به a/b همگراست.